BAB IX
BOLA, SILINDER DAN KERUCUT

9.1. Tempat Kedudukan di dalam Ruang

Tempat kedudukan disingkat TK adalah himpunan titik-titik yang memnuhi syarat-syarat yang ditentukan. TK mungkin hampa (ϕ), satu titik berupa kurva (garis lengkung /lurus), berupa permukaan (surface/bidang) ataupun seluruh ruang itu sendiri. Dalam menghadapi masalah TK kita mempunyai cara-cara menyelesaikan sebagaiberikut :

A. Mengambil titik (x_0, y_0, z_0) sembarang pada TK, lalu mencari hubungan-hubungan yang diperoleh, variabel *x, y, z* dieliminasi sehingga didapat hubungan-hubungan antara x_0, y_0, z_0 saja. Dengan menghapus indek nol dari hubungan tersebut (dikatakan: mejalankan titik (x_0, y_0, z_0)): diperoleh TK yang dinyatakan.

Contoh 49 :

Tentukan TK titik-titik yang berjarak 4 dari bidang *XOY* serta jumlah kuadrat jaraknya ke (1,0,0) dan (-1,0,0) adalah tetap = 36

Penyelesaian :

Ambil *P* ke (x_0, y_0, z_0) TK. Karena berjarak 4 dari bidang *XOY* (bidang *z* = 0)

maka : $z_0 = 4$ atau $z_0 = -4$ .... (1)

kuadrat jaraknya *P* ke (1,0,0) adalah $(x_0 - 1)^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2$

dan kuadrat jarak *P* ke (-1,0,0) adalah $(x_0 + 1)^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2$.

Sehingga jumlah kuadrat jaraknya = $(x_0 - 1)^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2 + (x_0 + 1)^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2$,

diketahui jumlah kuadrat jaraknya = 36. Atau $x_0{}^2 + y_0{}^2 + z_0{}^2 = 17$ .... (2)

Dari kedua hubungan (1) dan (2) bebas dari variabel *x, y, z* sehinga dengan menghapus indeks nol, diperoleh TK : $\begin{cases} z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 17 \end{cases}$

TK tersebut berbentuk sepasang lingkaran, Secara teori himpunan dapat kita tulis: TK= $\{(x,y,z)|z^2=16\}$ U $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=17\}$

B. Adanya / munculnya prameter. Dengan mengeliminasi parameter-parameter tersebut diperoleh TK yang dinyatakan . kalau terdapat (n + 1) hubungan n buah parameter maka TK merupakan permukaan . kalau (n + 2) hubungan dengan n buah parameter maka TK merupakan kurva

Contoh 50 :

Tentukan TK titik dengan vektor posisinya vekotr a yang yang mempunyai persamaan

a = [x,y,z] = [1,t,t^2] diman t suatu parameter

Penyelesaian :

[x,y,z] = [1,t,t^2] dapat ditiulis menjadi x = 1, y = = t, z = t^2. terdapat tiga hubungan dengan sebuah parameter, TK merupakan kurva peleyapan parameter menghasilkan $\begin{cases} x=1 \\ z=y^2 \end{cases}$

TK tersebut berbentuk parabola .

Catatan:

Titik dapat diwakili oleh vektor posisi titik tersebut. Hal ini memungkin kita menggunakan vektor

C. Pengambilan titik sembarang (x_0, y_0, z_0) pada TK disamping parameter yang ada / muncul . peleyapan parameter dan menjalankan (x_0, y_0, z_0) tersebut menghasilkan TK yang dinyatakan

Contoh 51 :

Sebuah garis lurus digerakkan sejajar y = 0 dan selalu memotong kurva-kurva:

C_1: $\begin{cases} xy=4 \\ z=0 \end{cases}$ dan C_2: $\begin{cases} y^2=8z \\ x=0 \end{cases}$ tentukan TK-nya

Penyelesaian ::

Ambil P (x_0, y_0, z_0) pada TK tersebut bila [a,b,c]merupakan arah garis diatas, diperoleh persamaan $x = x_0 + \lambda a, y = y_0 + \lambda b, z = z_0 + \lambda c$ .... (1)

λ suatu parameter, karena memotong C_1 dengan eliminasi (1) terdapat hubungan $(x_0 - az_0 / c).(y_0 - bz_0 / c) = 4$ .... (2)

Dan memotong C_2 diperoleh $(y_0 - bx_0 / a)^2 = 8(z_0 - cx_0 / a)$ .... (3)

Karena (1) sejajar dengan y = 0 berarti b = 0.

Eliminasi a, b, c dengan b = 0 dari (2) dan (3) menghasilkan $y_0{}^2(4 - x_0 z_0) = 32 z_0$ dan menjalankan (x_0, y_0, z_0) diperoleh TK suatu permukaan dengan persamaan $y^2(4 - xy) = 32z$.

9.2. **Persamaan Bola**

Permukaan bola merupakan TK titik-titik ujung vektor didalam ruang yang titik awalnya tertentu dan panjang vektor tersebut konstan. Titik awal yang tertentu itu disebut titik pusat dan panjang yang konstan itu disebut jari-jari bola atau. Permukaan bola adalah TK titik-titik di dalam ruang yang berjarak sama terhadap sebuah titik tertentu. Misalkan, pusat bola *M(a,b,c)*, jari-jari = *r*.

Ambil titik $P(x_0, y_0, z_0)$ pada bolamaka *MP* = *QP* – *QM* = $[x_0 - a, y_0 - b, z_0 - c]$ panjang *MP* diketahui = r , berarti : $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 = r^2$.

Dengan menjalankan *P*. Diperoleh persamaan bola:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 = r^2$$

Sehingga bola yang pusatnya di (0,0,0), jari-jari *r* adalah : $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Catatan:

Secara umum persamaan $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$

Menyatakan persamaan bola. Secara simbolis ditulis: bola *S* = 0.

Dalam hal ini pusat $(-\tfrac{1}{2}A, -\tfrac{1}{2}B, -\tfrac{1}{2}C)$ dan jari-jari $= \sqrt{\tfrac{1}{4}A^2 + \tfrac{1}{4}B^2 + \tfrac{1}{4}C^2 - D}$

Contoh 52 :

Tentuka jari-jari

(a) $x^2+y^2+z^2+8x-10y-6z+1=0$

(b) $2x^2+2y^2+2z^2-2x+2y+4z+3=0$

Penyelesaian :

(a) A = 8, B = -10, C = -6, D = 1

Pusat (-4,5,3), jari-jari $r=\sqrt{\tfrac14(8)^2+\tfrac14(-10)^2+\tfrac14(-6)^2-1}$

$= 7$

(b) Diubah dahulu menjadi $x^2+y^2+z^2-x+y+2z-1\tfrac12$

Pusat $\left(\tfrac12,-\tfrac12,-1\right)$, jari-jari $=\sqrt{\tfrac14(-1)^2+\tfrac14(1)^2+\tfrac12(2)^2+1\tfrac12=0}$

Jadi bola tersebut merupakan titik $\left(\tfrac12,-\tfrac12,-1\right)$

Catatan :

Pada persamaan $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ terdapat tiga kemungkinan terhadap $\tfrac14A^2+\tfrac14B^2+\tfrac14C^2-D$, yaitu

Bila $r>0$: bola tersebut adalah bola sejati

Bila r = 0 : bola berjari-jari nol (titik)

Bila $r<0$: bola merupakan boal khayal

Contoh 53 :

$x^2+y^2+z^2+2x+2y+4z+20=0$ merupakan bola khayal karena

$\tfrac14A^2+\tfrac14B^2+\tfrac14C^2-D=-14$

Catatan:

Persamaan S = 0 mengandung empat parameter A,B,C dan D. Karenanya bola akan tertentu bila diketahui melalui empat titik, yang tidak sebidang. Secara diterminan persamaan bola melalui empat titik. $(x_1 y_1, z_1),(x_2 y_2, z_2),(x_3 y_3, z_3),(x_4 y_4, z_4)$ adalah:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3{}^2+y_3{}^2+z_3{}^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4{}^2+y_4{}^2+z^{\ 2} & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Atau dapat juga menghilangkan A,B,C dan D dari sistem persamaan linier dengan empat persamaan

Contoh 54 :

Tentukan persamaan bola melalui 4 titik $P(a,0,0)$. $Q(0,b,0)$. R$(0,0,c)$. Dan $O(0,0,0)$

Penyelesaian :

Dengan determinan

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ a^2+0+0 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0+b^2+0 & 0 & b & 0 & 1 \\ 0+0+c^2 & 0 & 0 & c & 1 \\ 0+0+0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ atau}$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z \\ a^2 & a & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & b & 0 \\ c^2 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \text{ , kolom 1 dikurangi } c \text{ kali kolom 4}$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2-cz & x & y & z \\ a^2 & a & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2-cz & x & y \\ a^2 & a & 0 \\ b^2 & 0 & b \end{vmatrix} = 0$$

kolam 1 dikurangi b kali kolom 3

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2-cz & x & y \\ a^2 & a & 0 \\ b^2 & 0 & b \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2-cz-by & x \\ a^2 & a \end{vmatrix}$$

Atau: $ax^2+ay^2+az^2-acz-aby-a^2x=0$. Dibagi $a \neq 0$

$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$, bola yang diminta.

Dengan permisalan: $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$

Melalui titik 0(0.0.0) : $0^2+0^2+0^2+A0+B0+C0+D=0 \rightarrow D=0$

Melalui titik $P(a,0,0)$: $a^2+0^2+0^2+Aa+B0+C0+D=0 \rightarrow A=-a$

Melalui titik $Q(0,b,0)$: $0^2+b^2+0^2+A0+Bb+C0+D=0 \rightarrow B=-b$

Melalui titik $R(0,0,c)$: $0^2+0^2+c^2+A0+B0+Cc+D=0 \rightarrow C=-c$

Jadi bola tersebut $x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$

Catatan: Jelas dimengerti bila bola melalui titik awal (0,0,0) maka nilai D = 0.

9.3. Bola dan Bidang Rata

Bola S = 0 berjari-jari r, pusat M. bidang P = 0, dengan d = jarak pusat M ke bidang.

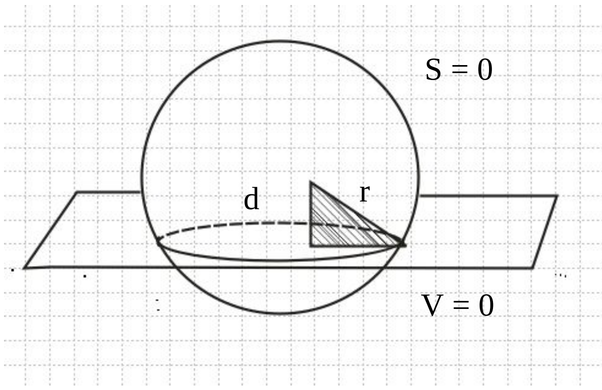
Hubungan bola dan bidang rata antara lain sebagai berikut :

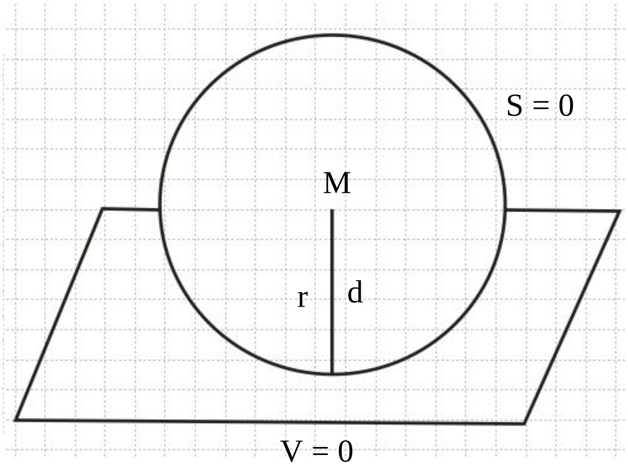
1. V memotong bola.

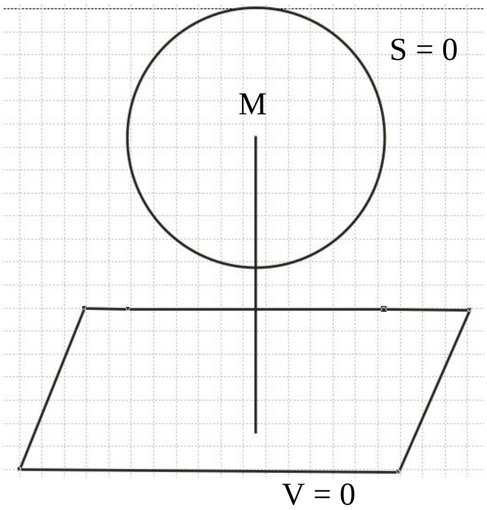
   Bila $d < r$: perpotongannya sebuah lingkaran

   Bila $d = r$: perpotongan sebuah titik (bidang menyinggung bola)

2. V tidak memotong bola bila $d > r$







Contoh 55 :

Bagaimana kedudukan bola $S = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 4z - 16 = 0$ dan bidang $x + 2y + 2z = 0$? Bila perpotongan, tentukan pusat dan jari-jari lingkaran perpotongannya!.

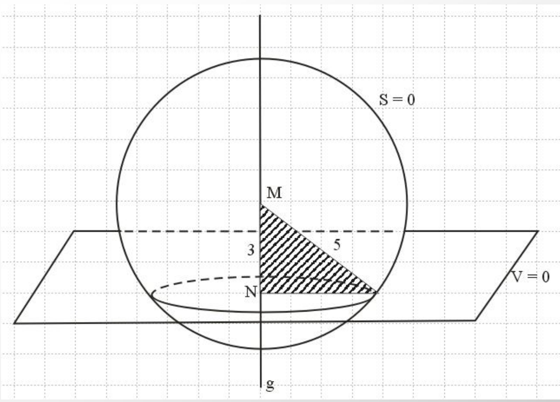
<u>Penyelesaian :</u> :

Jari-jari bola : $\sqrt{\frac{1}{4}(4) + \frac{1}{4}(16) + \frac{1}{4}(16) + 16} = 5$

Pusat M (-1,-2,-2)

d = jarak M ke nidang V = 0, yaitu :

$$d = \left| \frac{(1)(-1) + (2)(-2) + (2)(-2)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} \right| = 3$$



Ternyata $d < r$, jadi bidang memotong bola menurut sebuah lingkaran.

Jari-jari lingkara NP = $\sqrt{25-9} = 4$ (Phitagoras)

Pusat lingkaran N adalah titik tembus garis g yang melalui M dan tegak lurus bidang V = 0.

Jadi arah garis = normal V = [1,2,2].

Persamaan garis $g : x = -1 + \lambda$, $y = -2 + 2\lambda$, $z = -2 + 2\lambda$ …………….(1)

Yang disubstitusikan ke $x + 2y + 2z = 0$ menghasilkan :

$(-1 + \lambda) + 2(-2 + 2\lambda) + 2(-2 + 2\lambda) = 0$ maka $\lambda = 1$, sehingga dar persamaan (1)

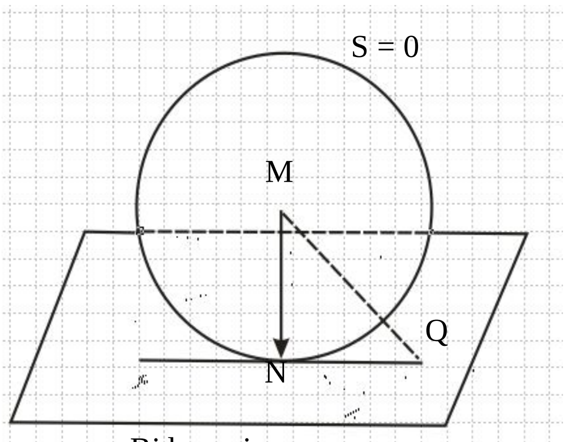
x = 0, y = 0, z = 0 atau (0,0,0) adalah pusat lingkaran yang diminta.

Catatan:

Bidang singgung di $N (x_1, y_1, z_1)$ pada bola.

Misalkan bola $S = x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$, pusat $M (-1/2A, -1/2B, -1/2C)$

Titik singgung $N (x_1, y_1, z_1)$



Karena $MN \perp$ bidang singgung (Q)

$MN \perp NQ$ maka $\overline{MN} \cdot \overline{NQ} = 0$

$\overline{MN} \cdot \left(\overline{MQ} - \overline{MN}\right) = 0$

$\overline{MN} \cdot \overline{MQ} - \overline{MN} \cdot \overline{MN} = 0$

$-r^2 = 0$

Jelas bahwa MN merupakan normal bidang singgung V, jadi persamaan V mudah dihitung sebagai berikut :

$MN = [x_1 + 1/2\, A, y_1 + 1/2\, B, z_1 + 1/2\, C]$, sehingga persamaan

$V_2 : (x_1 + 1/2/A\, (x - x_1) + (y_1 + 1/2\, B)\, (y - y_1) + (z_1 + 1/2\, C)\, (z - z_1) = 0,$

$x_1x + y_1y + z_1z + 1/2\, Ax + 1/2\, By + 1/2\, Cz - (+ 1/2\, A_1 + 1/2\, B_1 + 1/2\, C_1) = 0, (*)$ tetapi (x_1, y_1, z_1) pada bola, berarti : $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + Ax_1 + By_1 + Cz_1 = - D$, sehingga (*) menjadi $x_1x + y_1y + z_1z + 1/2\, A\, (x + x_1) + 1/2\, B\, (y + y_1) + 1/2\, C\, (z + z_1) + D = 0,$ merupakan bidang singgung yang ditanyakan.

Kalau bola $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$, maka bidang singgungnya adalah $(x_1 - a)\, (x - a) + (y_1 - b)\, (y - b) + (z_1 - c)\, (z - c) = r^2$

Dan bila bola $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ maka bidang singgungnya adalah : $x_1x + y_1y + z_1z = r^2$.

Catatan:

Rumus bidang singgung di atas mengikuti kaidah "MEMBAGI ADIL" yaitu penggantian :

- x^2 menjadi x_1x, y^2 menjadi y_1y, z^2 menjadi z_1z.
- x menjadi 1/2 $(x + x_1)$, y menjadi 1/2 $(y + y_1)$, z menjadi 1/2 $(z + z_1)$
- xy menjadi 1/2 $(x_1y + xy_1)$

Contoh 56 :

Tentukan persamaan bidang singgung pada bola $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 4z = 0$ di titik (0,0,0) !

Penyelesaian : :

Titik (0,0,0) pada bola, jadi dapat dipakai kaidah membagi adil

$x_1x + y_1y + z_1z + (x + x_1) + 2\, (y + y_1) + 2\, (z + z_1) = 0$,, dimana $(x_1 y_1, z_1) = (0,0,0)$ berarti $x + 2y + 2z = 0$ adalah bidang singgung yang ditanyakan.

Catatan :

Persamaan Lingkaran di dalam Ruang

Untuk menyatakan persamaan lingkaran di dalam ruang. Kita dapat mengambil sebuah bidang rata dan sebuah bola yang saling berpotongan menurut lingkaran tersebut.

Jadi, persamaan lingkaran itu dinyatakan dengan dua persamaan :

$$\text{Lingkaran } \begin{cases} V = 0 \\ S = 0 \end{cases}$$

Contoh 57 :

Tentukan persamaan lingkaran L yang melalui tiga titik $P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$ dan $R(0,0,c)$!.

Penyelesaian : :

Dibuat bidang yang melalui P, Q, dan R.

Misalkan $V \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

Melalui P $\longrightarrow$ $Aa + D = 0$ $\longrightarrow$ $A = -D/a$

Melalui Q $\longrightarrow$ $Bb + D = 0$ $\longrightarrow$ $B = -D/b$

Melalui R $\longrightarrow$ $Cc + D = 0$ $\longrightarrow$ $C = -D/c$

Jadi bidang $V \equiv -Dx/a - Dy/b - Dz/c + D = 0$, atau $x/a + y/b + z/c = 1$

Kemudian dibuat bola yang melalui P, Q, R dan satu titik tambahan sebarang (asalkan keempat titik tersebut tidak sebidang). Pada umumnya, diambil titik awal (0,0,0), yang pada contoh soal ini memungkinkan.

Persamaan bola yang dimaksud adalah $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$

$$\text{Jadi lingkaran } L : \begin{cases} x/a + y/b + z/c = 1 \\ x2 + y2 + z2\ \ ax\ \ by\ \ cz = 0 \end{cases}$$

Catatan:

Selain perpotongan bola dan bidang, suatu lingkaran juga dapat dinyatakan sebagai berikut :

- Perpotongan dua bola
- Perpotongan silinder atau kerucut lingkaran tegak lurus dengan bidang paralelnya (= bidang yang tegak lurus poros).

9.4. Kuasa Titik

Pandang bola $S\ (x,y,z) = 0$ dan titik $G\ (x_1,y_1,z_1)$ sebarang. Didefinisikan : kuasa titik G terhadap bola adalah nilai $k = S\ (x_1,y_1,z_1)$.

Contoh 58 :

Kuasa titik P (1,2,3) terhadap bola $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y - 2z - 8 = 0$ adalah :

$k = S\,(1,2,3) \equiv 1^2 + 2^2 + 3^2 - 6(1) + 8\,(2) - 2(3) - 8 = -10$ (titik P di luar bola S)

Catatan :

Sudah dipahami bahwa titik $G\ (x_1,y_1,z_1)$ terletak pada S (x,y,z) = 0. bila $S\ (x_1,y_1,z_1) = 0$ maka;

- Titik G di luar bola $\leftrightarrow k > 0$
- Titik G pada bola $\leftrightarrow k = 0$
- Titik G di dalam bola $\leftrightarrow k < 0$

Arti Ilmu Ukur dan Kuasa Titik

Pandang bola $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$, dan G (x_1,y_1,z_1).

Tarik garis sembarang melalui G dengan cosinus arah $[\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$

Yaitu : $\begin{cases} x = x_1 + \lambda\cos\alpha \\ y = y_1 + \lambda\cos\beta \\ z = z_1 + \lambda\cos\gamma \end{cases}$ …………………..(*)

Kita tentukan titik potong dengan bola. Subsitusikan (*) ke persamaan bola, diperoleh:

$(x_1 + \lambda\cos\beta)^2 + (y_1 + \lambda\cos\beta)^2 + (z_1 + \lambda\cos\beta)^2 + A(x_1 + \lambda\cos\alpha)^2 + B(y_1 + \lambda\cos\alpha)^2 +$

$C(z_1 + \lambda\cos\alpha)^2 + D = 0$,atau

$(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\lambda + 2\lambda\{(x_1 + \tfrac{1}{2}A)\cos\alpha + (y_1 + \tfrac{1}{2}B)\cos\beta + (z_1 + \tfrac{1}{2}C)\cos\gamma\} +$

$(x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2 + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ ……………………………………. (**)

Yang merupakan persamaan kuadrat dalam λ .

Kalau $D > 0$ diperoleh dua harga λ yang berbeda (ada dua titik potong)

$D = 0$ diperoleh dua harga λ yang kembar (titik singgung)

$D < 0$ diperoleh dua harga λ yang rill (garis tidak memotong bola)

Misalkan diperoleh dua harga berlainan λ_1 dan λ_2 maka titik potong diperolah (dari(*)):

$P\left(x_1+\lambda_1\cos\alpha, y_1+\lambda_1\cos\beta, z_1+\lambda_1\cos\gamma\right)$ dan

$Q\left(x_1+\lambda_2\cos\alpha, y_1+\lambda_2\cos\beta, z_1+\lambda_{21}\cos\gamma\right)$

Jarak GP = $\sqrt{(x_1+\lambda_1\cos\alpha-x_1)^2(+y_1+\lambda_1\cos\beta-y_1)^2+(z_1+\lambda_1\cos\gamma-z_1)^2}=|\lambda_1|$

Maka perkalian $GP.GQ$ = $|\lambda_1|.|\lambda_2|=\left|(x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2+Ax_1+By_1+Cz_1+D\right|$

(dari persamaan (**) dengan sipat perkalian akar). Yang bebas dari $\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma$.

Jadi $GP.QP$ = $|S(x_1,y_1,z_1)|$ = harga mutlak kuasa titik G terhadap bola $S(x,y,z)$ = 0

Atau : Bila dari titik tertentu G diatri sembarang garis yang memotong bola di P dan Q maka harga GP. GQ adalah konstan. Kalau G diluar bola mak harganya = kuasa G, dan kalau G di dalam bola maka harga negatifnya = kuasa G.

Contoh 59 :

Tentukan koordinat titik potong garis $g:\left(\frac{x+3}{4}\right)=\left(\frac{y+4}{3}\right)=\left(\frac{8-z}{5}\right)$ dan

Bola $s:x^2+y^2+z^2-10x-10y-23=0$!

<u>Penyelesaian :</u> :

Cosinus arah dari $g:\frac{4}{\sqrt{50}},\frac{3}{\sqrt{50}},\frac{-5}{\sqrt{50}}$

Dan persamaan G dapat ditulis : $\begin{cases} x=-3+\frac{4\lambda}{\sqrt{50}} \\ y=-4+\frac{3\lambda}{\sqrt{50}} \\ z=8-\frac{5\lambda}{\sqrt{50}} \end{cases}$ .... (*)

Bila disubsitusikan kepersamaan bola diperoleh :

$\lambda^2-\frac{150}{\sqrt{50}}-100=0\rightarrow\lambda_1=\frac{2}{\sqrt{50}}$, $\lambda_2=\sqrt{50}$

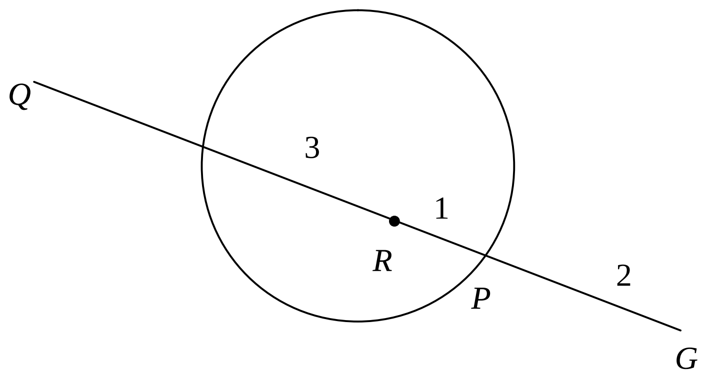
Jadi titik-titik potong (dari (*)) : (5,2, -20,9-1,-1,3)

Catatan .dapat juga dikerjakan tanpa dihitung cosinus arah, cukup dengan arah [4,3,-5] saja.

9.5. Bidang Kutub

Definisi Bidang Kutub

Pandang bola $S = 0$ dan titik O (x_1,y_1,z_1), tarik garis g melalui G yang memotong bola di P dan Q. titik R (x_0,y_0,z_0) pada garis g sedemikian sehingga P, Q sekawan harmonis dengan G, R. maka tempat kedudukan dari titik R apabila g bergerak merupakan suatu bidang rata yang disebut bidang kutub (bidang polar) bola $S = 0$ dengan kutub (titik Kutub) titik G.



> **Catatan :**
>
> P, Q sekawan harmonis dengan G, R artinya bila $GP : QP = \lambda : 1$,
>
> maka $GQ : RQ = -\lambda : 1$
>
> contoh (dari gambar) misalnya : $QR = 3$, $RP = 1$, $PG = 2$
>
> berarti $GP : RP = 2 : 1$ dan $GQ : RQ = -2 : 1$
>
> Jadi, P, Q sekawan harmonis dengan G, R

Persamaan Bidang Kutub

Persamaan bidang kutub. bola $S = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ dengan kutub G (x_1,y_1,z_1). Ambil R (x_0,y_0,z_0). Pada garis sembarang melalui g. titik yang membagi GR atas perbandingan λ : 1 berkoordinat : $\left(\frac{\lambda x_0 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_0 + y_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda z_0 + z_1}{\lambda + 1}\right)$

Agar titik di atas terletak pada bola haruslah :

$$\left(\frac{\lambda x_0 + x_1}{\lambda + 1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda y_0 + y_1}{\lambda + 1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda z_0 + z_1}{\lambda + 1}\right)^2 - r^2 = 0$$

Atau

$$\lambda^2\left(x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2-r^2\right)+2\lambda\left(x_1x_0+y_1y_0+z_1z_0-r^2\right)+\left(x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2-r^2\right)=0$$

….(1)

Dengan akar-akar persamaan kuadrat λ_1 dan λ_2 menunjukkan perbandingan dimana titik *P* dan *Q* membagi *GR*. Agar pembagian tersebut sekawan harmonis berarti $\lambda_1 = -\lambda_2$ atau $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ sehingga dari persamaan (1), dengan sifat akar :

$x_1x_0 + y_1y_0 + z_1z_0 - r^2 = 0$, dan dengan menjalankan titik (x_0,y_0,z_0) diperoleh persamaan bidang kutub : $x_1x + y_1y + z_1z = r^2$.

Catatan:

Persamaan bidang kutub mengikuti pola kaidah membagi adil, dimana (x_1,y_1,z_1) menunjukkan titik kutubnya. Kalau titik kutub diluar bola, maka bidang kutub merupakan bidang yang memuat lingkaran yang berpotongan bola dengan kerucut selubung bola yang puncaknya di titik tersebut.

Contoh 60 :

1. Tentukan bidang kutub bola $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y + 4z - 16 = 0$ dengan titik kutub (6,4,-8) !

   Penyelesaian : ;

   Dengan kaidah membagi adil, bidang kutub :

   $x_1x + y_1y + z_1z - 3\,(x + x_1) + (y + y_1) + 2\,(z + z_1) - 16 = 0$, dimana $(x_1,y_1,z_1) =$ (6,4,-8), berarti diperoleh : $3x + 5y - 6z - 46 = 0$

2. Tentukan titik kutub dari bidang $3x - 4y + 5z = 2$ terhadap bola $x^2 + y^2 + z^2 = 4$!

   Penyelesaian : :

   Bidang kutub bola $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ adalah $x_1x + y_1y + z_1z = 4$. kita identikkan dengan $3x - 4y + 5z = 2$ atau $6x - 8y + 10z = 4$. jadi, titik-titik kutub (6, -8, 10)

9.6. Kedudukan Dua Bola

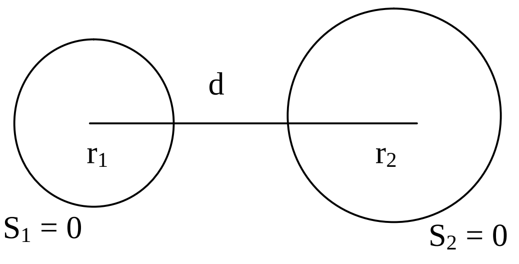
Bola $S_1 = 0$, pusat M_1, jari-jari r_1

$S_2 = 0$, pusat M_2, jari-jari r_2

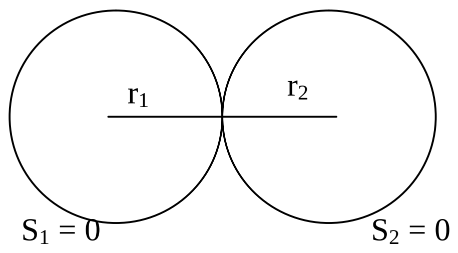
d = jarak pusat M_1M_2 (sentral)

1. Tidak berpotongan, bila $d > r_1 + r_2$
2. Bersinggungan luar, bila $d = r_1 + r_2$
3. Berpotongan, bila $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$
4. Bersinggungan dalam, bila $d = |r_1 - r_2|$
5. Bola yang satu di dalam bola yang lain, bila $d < |r_1 - r_2|$

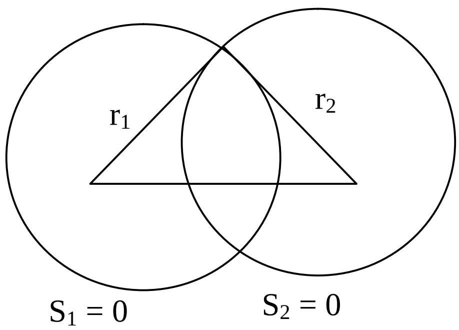
1)



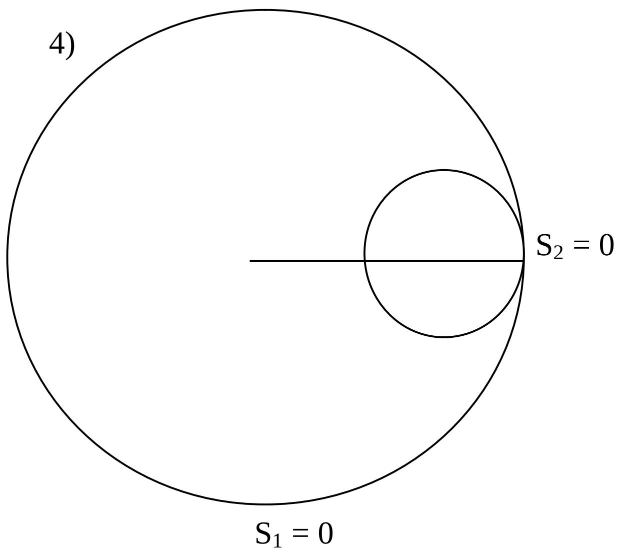
2)



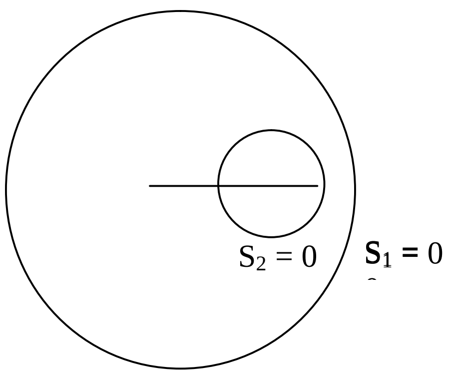
3)



4)



5)



Contoh 61:

Bagaimana kedudukan bola-bola ini :

a. $S_1 = x^2 + y^2 + z^2 = 16$ dan $S_2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + z = 0$

b. $S_1 = x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 2z - 3 = 0$ dan $S_2 = x^2 + y^2 + z^2 + 12x + 6y - 4 = 0$

c. $S_1 = x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 4z = 0$ dan $S_2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 4z = 0$

Penyelesaian : :

a. $S_1 = 0$, pusat M_1 (0,0,0), jari-jari $r_1 = 4$

$S_2 = 0$, pusat M_2 (1,1, - 1/2), jari-jari $r_2 = 3/2$

$d = M_1M_2 = 3/2$ $|r_1 - r_2| = 5/2$, $d < |r_1 - r_2|$.

Jadi, bola $S_2 = 0$ berada di dalam bola $S_1 = 0$

b. $S_1 = 0$, pusat M_1 (-2,-1,-1), jari-jari $r_1 = 3$

$S_2 = 0$, pusat M_2 (-6,-3,0), jari-jari $r_2 = 7$

$d = \sqrt{21}$ $|r_1 - r_2| = 4$. $r_1 + r_2 = 10$.

Ternyata $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$. Jadi, kedua bola berpotongan

c. $S_1 = 0$, pusat M_1 (-2,-1,-2), jari-jari $r_1 = 3$

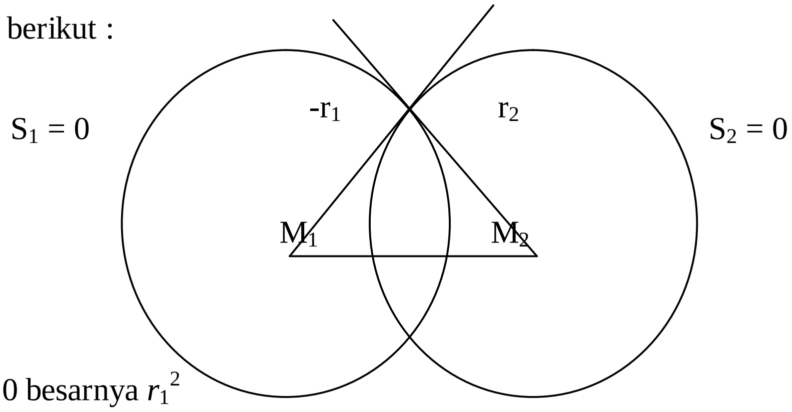
$S_2 = 0$, pusat M_2 (2,1,2), jari-jari $r_2 = 3$

$d = 6$, $|r_1 + r_2| = 6$.

Ternyata $d = 6$. Jadi, kedua bola bersinggungan luar

Catatan:

- Sudut perpotongan dua bola adalah sudut antara bidang-bidang singgung pada salah satu titik persekutuan dua bola. Atau sudut antara jari-jari yang mengarah ke titik tersebut.
- Dua bola berpotongan tegak lurus apabila sudut perpotongan 90^o. dengan sifat-sifat sebagai berikut :



- $(M_1M_2)^2 = r_1^2 + r_2^2$
- Kuasa M_1 terhadap $S_1 = 0$ besarnya r_1^2
- Kuasa M_2 terhadap $S_2 = 0$ besarnya r_2^2

Contoh 62 :

Tentukan persamaan bola yang melalui titik $T(3,2,2)$ serta memotong tegak lurus bola-bola

$S_1 = x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 1 = 0$

$S_2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 1 = 0$

$S_3 = x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 6y + 1 = 0$

<u>Penyelesaian :</u>

Misalkan persamaan bola yang diminta

$(x - a)^{-2} + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$, pusat $M(a,b,c)$, jari-jari = r

Karena tegak lurus S_1, S_2, dan S_3 maka kuasa M terhadap tiga bola tersebut sama, yaitu = r^2

Kuasa M terhadap $S_1 : a^2 + b^2 + c^2 + 4a + 1$ ………………..(1)

terhadap $S_2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4a + 1$ ………………..(2)

terhadap $S_3 = a^2 + b^2 + c^2 + 3a - 6b + 1$ …………..(3)

dari (1) dan (2) diperolah $a = 0$

dari (1) dan (3) diperoleh $b = 0$

berarti $M(0,0,c)$

bola melalui T, berarti $(MT)^2 = r^2 = 9 + 4 + + (2 - c)^2 = 17 - 4c - c^2$ ………..(4)

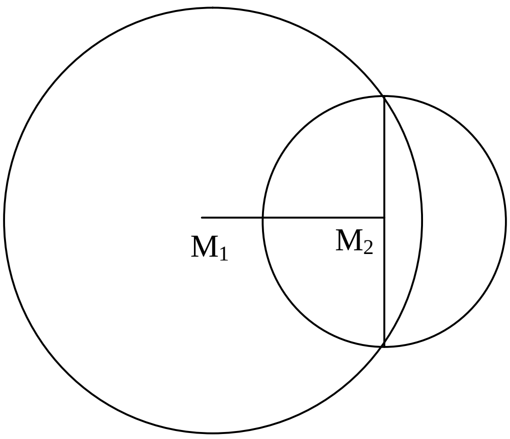
dari (1), kuasa M terhadap $S_1 : c^2 + 1 = r^2$ ……………(5)

dari (4) dan (5) : $c = 4$. kembalikan ke (5) $r^2 = 17$

jadi persamaan bola $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 17$

Catatan : Bola Membagi Dua Sama Besar Bola lain

$S_1 = 0$ dan $S_2 = 0$ berpotongan, dengan lingkaran perpotongan merupakan lingkaran besar (lingkaran yang pusat dan jari-jarinya sama dengan pusat dan jari-jari bola) bola S_2, maka dikatakan S_1 membagi dua S_2 sama besar



$S_1 = 0$

$S_2 = 0$

Sifat – sifat :

- $(M_1M_2)^2 = r_1^2 - r_2^2$
- Kuasa M_2 terhadap S_1 besarnya = $-r_1^2$

(karena M_2 terletak di dalam S_1)

Contoh 63 :

Tentukan persamaan bola yang melalui (1,-3,4), memotong tegak lurus $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 12z + 4 = 0$, membagi dua sama besar $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 8y - 4z + 14 = 0.$ selain itu, diketahui bahwa kuasa titik (-4,-1,0) terhadap bola yang dinyatakan tersebut sama dengan 13 !

Penyelesaian : :

$S_1 = 0$, pusat M_1 (2,1,-6), jari-jari $r_1 = \sqrt{37}$

$S_2 = 0$, pusat M_2 (-1,-4,2), jari-jari $r_2 = \sqrt{7}$

Misalkan bola yang dinyatakan $S : x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$

Melalui (1,-3,4) : $26 + A - 3B + 4C + D = 0$ ……………………………………….…..(1)

Kuasa (-4,-1,0) : $17 - 4A - B + D = 13$ (diketahui) atau $4 - 4A - B + D = 0$ …………. (2)

Bola S memotong S_1 tegak lurus berarti kuasa M_1 terhadap S adalah

$r_1^2 = 37 = 41 + 2A + B - 6C + D$ atau $4 + 2A + B - 6C + D = 0$ ………………………..(3)

bola S membagi dua sama besar S_2 berarti kuasa M_2 terhadap S adalah :

$-r_2^2 = -7 = 21 - A - 4B + 2C + D$ atau $28 - A - 4B + 2C + D = 0$ ....……(4)

Bila keempat persamaan (1), (2), (3) dan (4) diselesaikan, diperoleh $A = -2$, $B = 6$, $C = 0$ dan $D = -6$.

Jadi persamaan bola yang diminta $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 6 = 0$

9.7. Bidang Kuasa, Sistem Bola

Bidang kusa dari bola $S_1 = x^2 + y^2 + z^2 + A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, dan $S_2 = x^2 + y^2 + z^2 + A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ adalah tempat kedudukan titik-titik $K(x_o,y_o,z_o)$ yang kuasanya terhadap S_1 dan terhadap S_2 sama